ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(Сентябрь 1930 г.)

Периодическая функция. Синусоидальная функция. Амплитуда, частота, циклическая частота, фаза. Диапазон частот, встречающихся в природе. Среднее, среднее квадратичное, эффективное значение. Сложение синусоидальных колебаний. Суперпозиция, неудачность термина „интерференция"; неаддитивность энергий. Сложение колебаний со случайными фазами; необходимость статистического постулата; аддитивность энергий в среднем; когерентные и некогерентные колебания.

Мы говорили в прошлый раз о том, что несколько трудно определить ту область, которой занимается теория колебаний. Мы говорили, что особенности, характерные для колебательных явлений, повторяются в самых разнообразных областях и что теория колебаний интересуется преимущественно целостными процессами. Среди процессов, находящихся в центре внимания теории колебаний, особенно важную роль играют процессы повторяющиеся или, в несколько более узком разрезе, периодические.

Мы займемся сначала периодическими процессами. В качестве математического инструмента мы будем пользоваться здесь периодическими функциями, т. е. такими функциями $y=f(t)$, что при любом t и определенном τ

$$f(t+\tau)=f(t).$$

τ называется периодом. Нетрудно показать, что если функция имеет период, то она имеет бесчисленное множество периодов. Действительно,

$$f(t+\tau+\tau)=f(t+\tau)=f(t).$$

Следовательно, 2τ — тоже период, и вообще любое целое кратное от периода есть период. Принято, говоря без каких-либо дальнейших указаний о периоде, иметь в виду наименьший период.

Итак, периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. Возможны ли у периодической функции несоизмеримые периоды? Нетрудно доказать, что этого не может быть, если функция не есть постоянная (постоянная есть периодическая функция, для которой любое число есть период). Предположим, что функция имеет два периода τ и τ'. Если τ — период, то $n\tau$, где n — любое целое число, тоже период. Если τ' — период, то $m\tau'$, где m — любое целое число, тоже период. Если τ и τ' несоизмеримы, то можно выбрать n и m так, чтобы разность $m\tau'-n\tau$

была как угодно мала. Но эта разность тоже есть период, а значит, функция имеет сколь угодно малый период. Но такая функция есть постоянная.

Построить периодическую функцию можно весьма разнообразными способами. Можно, например, задать в некотором интервале $(0, \tau)$ любую функцию и затем повторять ее неограниченное число раз слева и справа. Вообще говоря, значения функции в начале интервала и в конце предыдущего не совпадут (рис. 2). Следовательно, построенные таким путем функции в общем случае не будут непрерывны, а будут иметь скачки на границах интервала $(0, \tau)$. Таким образом, в рассмотрение входят разрывные функции.

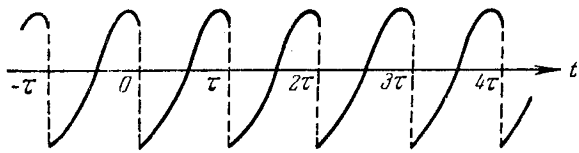

Рис. 2.

Функции, принадлежащие к классу периодических, весьма разнообразны. Среди них есть функции, образующие подкласс, играющий особенно важную роль, а именно синусообразные функции. Их общая запись такова:

$$y = f(t) = a \cos\left(\frac{2\pi}{\tau} t - \varphi\right).$$

Здесь имеются три постоянные величины: a, φ и τ.

Функции такого вида играют в физике громадную роль. Чем это вызвано? Иногда говорят — тем, что синусообразная функция — „самая простая“ из периодических функций. Но такой ответ вряд ли удовлетворителен, так как критерий „простоты“ — в достаточной мере неопределенный критерий. Роль этих функций в физике обусловлена главным образом тем значением, какое имеют в теории колебаний гармонические (синусообразные) колебания.

Существует бесчисленное множество явлений, которые изображаются такого рода функциями. Прежде всего колебания маятника (приблизительно, если они малы), в оптике — „спектрально простой“ (монохроматический) свет. В акустике с понятием синусоидального колебания связано понятие о чистом тоне: чистый тон имеет место тогда, когда частицы воздуха колеблются гармонически. Радиостанции, когда они работают, но не производят передачу сигналов, дают электромагнитные колебания, очень близкие к гармоническим.

Придется сказать несколько слов о терминах, хотя многое здесь хорошо известно.

Величина

$$\nu = \frac{1}{\tau}$$

называется *частотой* колебаний. Пользуясь ν, формулу гармонических колебаний можно записать в виде

$$y = a\cos(2\pi\nu t - \varphi).$$

При такой записи приходится всюду писать множитель 2π. Чтобы этого избежать, часто вводят вместо ν *циклическую частоту* ω:

$$\omega = 2\pi\nu$$

(мы будем также обозначать ее иногда буквами n и p).

Почему ω называется циклической частотой? Рассмотрим равномерное движение по окружности, происходящее с тем же периодом, что и наше гармоническое колебание. Тогда ω будет угловой скоростью движения по кругу (циклу).

Физический смысл величины a весьма прост. Эта величина, называемая амплитудой, равна максимальному значению y.

Что такое φ? Если мы изменим величину φ, которая называется *фазой*, то функция будет приобретать то значение, которое она имела в определенный момент $t = t_1$ при каком-то другом значении $t = t_2$. Сдвиг на $^1/_4$ периода соответствует $\varphi = \pi/2$. Функции cos и sin отличаются только фазой: замена одной из этих функций другой означает лишь перемещение кривой по времени на четверть периода.

Фаза играет чрезвычайно важную роль, если имеется *два* колебательных процесса и производится сдвиг одного из них по отношению к другому.

Интересно, каковы численные значения частот у встречающихся в природе периодических процессов.

Вот частоты некоторых периодических явлений в сек$^{-1}$:

10^{-10} — вековые возмущения планет;

10^{-8} — обращения планет;

10^{-5} — приливы и отливы;

10^{1} — колебания в машинах;

10^0 — секундный маятник;
до 10^4 — акустические колебания;
10^5—10^8 — быстрые (ультразвуковые) механические колебания пьезокварца;
50 — переменный ток;
10^5—10^8 — радиотелеграфия;
10^{12} — инфракрасное излучение;
10^{15} — видимый оптический спектр;
10^{18} — рентгеновы лучи;
10^{20} — γ-лучи;
10^{23} — космические лучи.

Таким образом, получается колоссальный диапазон от 10^{-10} до 10^{23} колебаний в секунду. При этом ряд характерных закономерностей остается в силе на протяжении всей шкалы, например, в приливах и в световых колебаниях...

Остановимся коротко на некоторых свойствах функций cos и sin.

Рассмотрим прежде всего их средние значения. Среднее из нескольких величин есть сумма этих величин, деленная на их число. Например, среднее из четырех чисел 3, 4, 5, 10 есть

$$\frac{3+4+5+10}{4}=5{,}5.$$

Подобно этому *среднее значение функции* $f(t)$ в интервале от t_1 до t_2 есть

$$\overline{f(t)}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt.$$

Во многих вопросах это среднее играет первостепенную роль. Вот, например, один из таких вопросов: дана большая масса, как она будет двигаться при действии на нее быстропеременной силы? Для ответа на этот вопрос нужно знать среднее значение силы[1].

Среднее значение cos за период равно нулю:

$$\overline{\cos(\omega t-\varphi)}=0;$$

его среднее значение за полпериода равно $2/\pi$.

---

[1] [См. 20-ую лекцию.]

Часто представляет интерес *среднее квадратичное* значение синусообразной функции, т. е. среднее значение от

$$y^2 = a^2 \cos^2(\omega t - \varphi).$$

Оно равно

$$\overline{y^2} = \frac{a^2}{2}.$$

Это чрезвычайно важный результат. Например, в случае синусообразного переменного тока среднее, выделяющееся в единицу времени, количество теплоты пропорционально $a^2/2$; теплоты выделяется в среднем столько же, как если бы тёк постоянный ток силы $a/\sqrt{2}$. Величина $a/\sqrt{2}$ называется эффективным значением гармонически колеблющейся величины.

Пусть теперь у нас имеется не одно, а два, три и т. д., вообще N, сосуществующих гармонических колебаний одинаковой частоты:

$$y_1 = a_1 \cos(\omega t - \varphi_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_N = a_N \cos(\omega t - \varphi_N).$$

Спрашивается, каково будет $y_1 + y_2 + \ldots + y_N$. Математически вопрос решается элементарно, но что значит такое суммирование *физически?*

Разложение на слагаемые неоднозначно. 10 равно $3+7$, но оно равно также $5+5$. Что хотят сказать, говоря, что некоторая величина есть сумма двух гармонических колебаний? В каких случаях имеет смысл такая постановка вопроса?

Вот прототип подобных случаев. Пусть имеется два источника света. Пусть первый источник света в отдельности дает поле (колебание) y_1, второй источник в отдельности — поле (колебание) y_2. Какое поле будет при наличии обоих источников? Заранее вы ничего не можете об этом сказать. Но существует такой *экспериментальный факт*: поле при наличии обоих источников равно сумме полей, создаваемых каждым источником в отдельности. Есть и такие случаи, когда складывать колебания нельзя: так будет всякий раз, когда имеется нелинейность, например при больших амплитудах в акустике. Вопрос о том, когда можно складывать отдельные колебания и когда нельзя, — это не математический, а *физический* вопрос.

Возьмем сначала следующий простой случай:

$$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

Легко видеть, что здесь

$$y = C\cos(\omega t - \psi),$$

причем

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{B}{A}.$$

Перейдем теперь к более общему случаю:

$$y = a_1\cos(\omega t - \varphi_1) + a_2\cos(\omega t - \varphi_2).$$

Здесь

$$y = a\cos(\omega t - \varphi),$$

причем

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сумма двух гармонических колебаний одинаковой частоты есть опять гармоническое колебание той же частоты. Отсюда следует, что сумма любого числа гармонических колебаний одинаковой частоты также будет гармоническим колебанием той же частоты.

Первая формула (1) показывает, что амплитуда существенным образом зависит от фаз складываемых колебаний. В этой формуле заключена, по сути дела, вся теория интерференционных явлений.

В частности, если $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, имеем:

$$a^2 = (a_1 + a_2)^2;$$

если $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, имеем:

$$a^2 = (a_1 - a_2)^2;$$

если $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$, имеем:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2.$$

Если $a_1 = a_2$, то при $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ имеем:

$$a^2 = 4a_1^2.$$

Квадрат амплитуды определяет собой энергию. В последнем случае при сложении амплитуда удваивается и, следовательно, энергия учетверяется. Энергии складываются только в том случае, когда сдвиг фаз равен $\pm\pi/2$.

Слово „интерференция“ значит взаимодействие; но здесь для самих колеблющихся величин y взаимодействия *нет*: для них справедлив принцип суперпозиции (наложения). Для энергии он не справедлив, так как энергии взаимодействуют, они действительно интерферируют. Для самих колеблющихся величин термин „интерференция“ неудачен. На это указывал еще Релей. Заметим, что непосредственный физический смысл имеют во многих случаях не сами величины, входящие в уравнения, — уравнения Максвелла, уравнение Шрёдингера и т. п., — а их квадраты (точнее, в случае уравнения Шрёдингера, квадрат модуля). Именно для этих квадратичных величин имеет место интерференция.

Подчеркну еще раз, что аддитивность не есть нечто самоочевидное. Пусть, например, один переменный ток выделяет в секунду 10 калорий, второй ток — столько же. Если они будут течь вместе, они будут выделять, вообще говоря, не 20 калорий в секунду. Количество выделяемой в секунду теплоты может равняться и 0, и 40 калориям: решающей здесь является разность фаз обоих токов.

В физике встречаются и иного типа вопросы о сложении колебаний. Имеется, например, светящийся газ. В нем очень много молекул, излучающих поля с разнообразными амплитудами и фазами. Какова амплитуда результирующего колебания? Казалось бы, достаточно сказать, какова амплитуда и фаза каждого колебания, — мы их сложим и получим ответ. Но если фазы отдельных колебаний не известны, то и о результирующей амплитуде ничего сказать нельзя.

Для простоты предположим сначала, что имеется всего два источника, создающие колебания с одинаковой амплитудой, равной единице, и с фазами, которые могут принимать два значения: 0 и π. Таким образом, первое колебание есть $\pm\cos\omega t$, второе — также $\pm\cos\omega t$. Какова амплитуда результирующего колебания?

Возможны следующие комбинации:

$$\begin{array}{ccl} + & - & 0 \\ + & + & \multirow{2}{*}{\Big\}\ 4} \\ - & - & \\ - & + & 0 \end{array}$$

(в первых двух столбцах — знаки амплитуд первого и второго колебания, в третьем столбце — квадрат амплитуды результирующего колебания). Если мы не знаем, какая из этих возможных комбинаций осуществляется, мы ничего не можем сказать об амплитуде результирующего колебания. Иногда говорят: нет оснований, чтобы одна комбинация встречалась чаще, чем другая. В действительности это утверждение ниоткуда не вытекает с необходимостью. По существу здесь возникает вопрос, находящийся вне компетенции тех методов, которыми мы до сих пор пользовались. Для того, чтобы ответить на вопрос, как часто встречается та или другая комбинация, нужна новая гипотеза, *новый постулат*. Такого рода *статистические* гипотезы проходят красной нитью через многие вопросы физики.

Сделаем следующее *статистическое предположение:* если мы рассматриваем явление в течение долгого времени, то фазы каждого из колебаний успевают много раз измениться и одинаково часто встречается любая из четырех комбинаций. Тогда средний квадрат амплитуды будет равен 2, т. е. энергии *в среднем* будут складываться.

Сделанное дополнительное предположение позволяет выводить заключения только для очень большого числа опытов и только в среднем. Но без этого (или иного) дополнительного предположения здесь вообще нельзя ничего получить [1].

К затронутому вопросу имеет прямое отношение известная полемика между Больцманом и Бертраном. Больцману казалось, что он чисто математически вывел свою H-теорему из классической механики, без дополнительных предположений статистического характера. Он просто упустил при этом из виду одно постулативно высказанное им положение о числе соударений (Stosszahlansatz). Бертран по поводу этого „чисто математического“ вывода сказал: это напоминает задачу о корабле, который имеет столько-то мачт, пушек и т. д., и требуется найти из этих данных возраст капитана.

Рассмотрим теперь сложение N колебаний вида $\pm\cos\omega t$. Пусть, например, мы имеем такое распределение:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ldots \\ + & - & + & - & - & -\ldots \end{array}$$

(первая строка: номер колебания; вторая: знак его амплитуды).

---

[1] [Ср. 9-ую и 10-ую лекции.]

Что вероятнее: написанная здесь комбинация или другая, в которой сначала будет 2 раза подряд $+$ или 3 раза подряд $+$? Когда мы говорим, что все комбинации одинаково вероятны (или: все распределения встречаются одинаково часто), то надо ясно понимать, что это — *постулат*.

Всего складывается N колебаний. Пусть из них N_1 входят с минусом, остальные $N-N_1=N_2$ — с плюсом. Квадрат результирующей амплитуды имеет величину $(N-2N_1)^2$. Спрашивается, сколькими способами (при заданном N) может быть осуществлено такое значение результирующей интенсивности?

Пусть X — число комбинаций, осуществляющих такое значение интенсивности, т. е. комбинаций с N_1 минусами и $N-N_1$ плюсами.

Возьмем какую-нибудь одну из этих комбинаций. Путем перестановок N_1 амплитуд, вошедших с минусом, мы можем осуществить $N_1!$ комбинаций с тем же числом плюсов и минусов; путем перестановок $N-N_1$ амплитуд, вошедших с плюсом, мы можем осуществить $(N-N_1)!$ комбинаций с тем же числом плюсов и минусов. Следовательно, путем перестановок N_1 амплитуд с минусом и $(N-N_1)$ амплитуд с плюсом мы получаем $N_1!(N-N_1)!$ комбинаций с тем же числом плюсов и минусов. Сделав такие перестановки в каждой из наших X комбинаций, как исходной, мы получим всевозможные перестановки из N элементов, т. е.

$$X \cdot N_1!(N-N_1)! = N!$$

Отсюда

$$X=\frac{N!}{N_1!(N-N_1)!}=C_N^{N_1}$$

(число сочетаний из N по N_1). Каждая из этих комбинаций дает квадрат амплитуды $(N-2N_1)^2$. Средний квадрат амплитуды есть сумма всех значений квадрата амплитуды, деленная на общее число этих значений. Таким образом:

$$\overline{a^2}=\overline{(N-2N_1)^2}=\frac{\sum\limits_{N_1=0}^{N} C_N^{N_1}(N-2N_1)^2}{\sum\limits_{N_1=0}^{N} C_N^{N_1}}. \qquad (2)$$

Нетрудно убедиться, что нижняя сумма равна 2. Действительно, из формулы бинома

$$(x+1)^N=\sum_{N_1=0}^{N} C_N^{N_1} x^{N_1}$$

при $x=1$ получаем:

$$2^N=\sum_{N_1=0}^{N} C_N^{N_1}. \tag{3}$$

Для вычисления верхней суммы, стоящей в числителе (2) (обозначим ее S), употребим изящный прием, связанный с разбиением этой суммы на две и с преобразованием второго слагаемого:

$$S=N^2\sum_{N_1=0}^{N} C_N^{N_1}-4N(N-1)\sum_{N_1=0}^{N}\frac{(N-2)!\,N_1(N-N_1)}{N_1!\,(N-N_1)!}.$$

Воспользовавшись (3) и заметив, что во второй сумме члены с $N_1=0$ и $N_1=N$ равны нулю, получаем:

$$S=N^2\cdot 2^N-4N(N-1)\sum_{N_1=1}^{N-1}\frac{(N-2)!\,N_1(N-N_1)}{N_1!\,(N-N_1)!}.$$

Входящая сюда сумма может быть представлена в виде

$$\sum_{N_1=1}^{N-1}\frac{(N-2)!}{(N_1-1)!\,[N-2-(N_1-1)]!}=\sum_{n=0}^{N-2}\frac{(N-2)!}{n!\,(N-2-n)!}$$

и согласно (3) равна 2^{N-2}. Следовательно,

$$S=N^2\cdot 2^N-4N(N-1)\cdot 2^{N-2}=[N^2-N(N-1)]\,2^N=N\cdot 2^N. \tag{4}$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получаем:

$$\overline{a^2}=N.$$

Если амплитуда отдельного колебания равна не 1, а α, то

$$\overline{a^2}=N\alpha^2.$$

Итак, в случае сложения колебаний со случайными фазами энергии (в среднем) складываются.

Если разности фаз между колебаниями постоянны, то говорят о *когерентных* колебаниях. Если же фазы разбросаны совершенно беспорядочно, то говорят, что колебания *некогерентны*. Такие некогерентные колебания испускаются, например, молекулами светящегося газа.

Мы рассмотрели частный случай, когда фазы равны либо 0, либо π. Можно рассмотреть общий случай, когда фазы принимают любые значения. Релей показал, что и в этом общем случае некогерентности энергии (всреднем) складываются. Это — очень существенная теорема.

ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ

(Октябрь 1930 г.)

Задача об апроксимации функций тригонометрическими полиномами. Теорема Фурье. Исторические замечания о понятии функции. Класс функций, разложимых в ряд Фурье. Метод комплексных величин; когда можно и когда нельзя его применять.

Нам нужно коснуться вычислительного приема, широко применяемого в теории колебаний, — использования комплексных величин. Здесь необходимо предостеречь от одной распространенной ошибки: часто бывает так, что к этому приему привыкают, а потом забывают, когда можно и когда нельзя им пользоваться.

Напишем известные формулы:

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx,$$

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \quad \sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}),$$

где

$$i \cdot i = -1.$$

Эти формулы позволяют выразить синусоидальные колебания через комплексные экспоненциальные функции. В волновой механике теория строится так, что в нее непосредственно входят комплексные величины. Здесь, в теории колебаний, дело обстоит иначе. Нас интересуют *действительные* величины. Например, когда мы пишем e^{ikx}, то нас интересует действительная часть этого выражения, т. е. $\cos kx$; но работать с комплексными величинами удобно, потому что при дифференцировании они себя воспроизводят с точностью до множителя, между тем как синус и косинус ведут себя сложнее.